# שיפור אלגוריתם שאפלי

## משחקים שיתופיים

בתורת המשחקים, "משחק שיתופי" (Cooperative game או Coalitional game) הוא משחק שבו כל השחקנים מסוגלים לתקשר ביניהם ולהגיע להחלטות משותפות ולהסכמים הניתנים לאכיפה. המטרה של כל השחקנים היא לשתף פעולה לתועלת כולם. משחק שיתופי מתעסק בחיזוי אילו קואליציות יוקמו, מהם הפעולות המשותפות שקבוצות ינקטו, ומהו הרווח/תשלום הנובע לכל שחקן מכך.

משחק שיתופי מוגדר על ידי צמד כאשר:

N - קבוצת סופית של שחקנים.

v - פונקציה הנותנת לכל תת קבוצה של N, הנקראת קואליציה, את "שווי הקואליציה" שהיא סכום התמורה הצפוי של כל השחקנים שהושג על ידי שיתוף הפעולה ביניהם. פונקציה זו תמיד מקיימת . פונקציה זו נקראת "פונקציית הרווח".

## הגדרת הבעיה

קואליציה של שחקנים משתפת פעולה, ומשיגה רווח כולל מסוים משיתוף הפעולה הזה. ההנחה המרכזית היא שהקואליציה הגדולה של N השחקנים תיווצר והמטרה היא לחלק את הרווח בין השחקנים בצורה הוגנת. מאחר שחלק מהשחקנים עשויים לתרום לקואליציה יותר מאחרים או להחזיק בכוח מיקוח שונה, כיצד יש לחלק את הרווח שנוצר בקרב השחקנים עבור קואליציה זו? בנוסח אחר: עד כמה חשוב כל שחקן לשיתוף הפעולה הכולל, ולאיזה תמורה הוא יכול לצפות באופן סביר?

פתרון לבעיה זו הוא פונקציה שלכל משחק שיתופי תחזיר וקטור המייצג בכל איבר את הרווח שיקבל שחקן i. עוד נסמן ב- הערך שיקבל שחקן i במשחק לפי .

## מאפיינים

### מאפייני הבעיה

1. **מונוטוניות** - לכל שתי קבוצות מתקיים: .
2. **סופר אדיטיביות** - לכל שתי קבוצות זרות מתקיים: .

### מאפייני הפתרון

1. **יעילות** - סכום הרווח שקיבלו כל השחקנים שווה לערך של הקואליציה הגדולה, כך שכל הרווח מתחלק בין השחקנים, ללא בזבוז. .
2. **סימטריות** - שני שחקנים שתרומתם שווה לכל קואליציה, יזכו באותה תמורה. אם לכל אזי .
3. **ליניאריות** - עבור שני משחקים שיתופיים ו- הפתרון עבור המשחק השיתופי מקיים לכל שחקן . בנוסף, עבור כל מתקיים לכל שחקן . המאפיין האחרון מתבטא בעיקר כאשר ממירים את המטבע באמצעותו מייצגים את הרווח. לדוגמה, משקלים לדולרים.
4. **עקרון ה-0** - שחקן i יקרא שחקן ה-0 אם לכל מתקיים , כלומר אינו משפר את רווחיותה של אף קבוצה. עבור שחקן 0 i מתקיים , כלומר אינו ראוי לקבל אף תמורה.
5. **אנונימיות** - אם i ו-j שני שחקנים, ו-w פונקציית רווח זהה ל-v אלא שבה i ו-j הוחלפו, אזי מתקיים .
6. **Individual rationality** - לכל שחקן מתקיים . כלומר כל שחקן מרוויח לפחות מה שהיה מרוויח לבדו. מאפיין זה מכריח שלכל שחקן יהיה כדאי להשתתף בקואליציה.

## ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם שאפלי הוא אלגוריתם שפותר את הבעיה המתוארת לעיל עם כל המאפיינים שתיארנו. הרווח שיקבל כל שחקן בהתאם לתרומה שלו לקואליציה הוא "ערך השאפלי" שלו, המחושב באופן הבא:

* עבור על כל הסידורים האפשריים של השחקנים.
* עבור כל סידור וכל שחקן, חשב את העלות השולית שלו בסידור זה.
* התשלום של כל שחקן הוא הממוצע החשבוני של העלויות השוליות שלו בכל אחד מהסידורים.

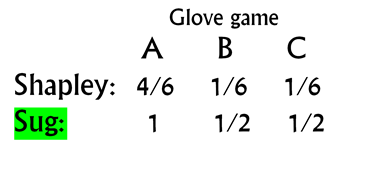
כאשר R הוא כל הסידורים האפשריים של השחקנים. יש סידורים כאלו. ו- היא קבוצת כל השחקנים שמקדימים את i בסדר R.

**נוסחה שקולה:** נשים לב שישנם מספר אשר מגדירים את אותה קבוצה שחישוב העלות השולית של i עבורה הוא בדיוק אותו דבר. לכן במקום לחשב את הנוסחה כל פעם מחדש נוכל להכפיל את העלות השולית במספר התמורות ב-R עבורם . מספר התמורות עבורם הוא . מכאן נגיע לנוסחה הבאה **שהיא קלה יותר חישובית**.

אלגוריתם שאפלי מלבד היותו מספק חלוקה הוגנת, הוכח כי הוא היחיד שמספק את ארבעת המאפיינים לפתרון: יעילות, סימטריות, לינאריות ועקרון ה-0.

## הצעה לאלגוריתם

במקרים מסוימים, כמו משחק הכפפה, שבו יש שלושה שחקנים עם פונקציית רווח המתוארת משמאל, אלגוריתם שאפלי נותן לשחקן A יותר מאשר כפי שרוב האנשים יבחרו לחלק את הרווח. רוב האנשים יחשבו ש-B ו-C מקופחים ביחס ל-A. אנו חושבים שאולי הסיבה לאבחנה זו היא בגלל ש-A צריך את B או C להרוויח משהו. לכן הגיוני שהם יעשו ברית ביניהם ויבקשו יותר מהרווח. מתוך כך עלתה הצעה לאלגוריתם הבא:

עבור על כל תתי הקבוצות ובדוק לכל תת קבוצה האם משתלם להם להתאגד כך שיחשבו שחקן אחד ויתחלקו ברווח שיקבלו שווה בשווה.

* עבור על כל תת קבוצה A:
* התייחס אל A כשחקן 1 והרץ אלגוריתם שאפלי.
* את הרווח של קבוצה A חלק שווה בשווה.
* שמור את A אם עבור **כל השחקנים ב-A** זוהי הקבוצה הכי משתלמת שמצאו עד כה.
* הרץ אלגוריתם שאפלי על כל הקבוצות שהתאגדו והשחקנים שנותרו ללא קבוצה וחלק רווחים לפי ערך השאפלי של כל שחקן. כל קבוצה תתחלק בשווה.

אלגוריתם זה טוב כאשר:

1. כאשר יש שחקן אחד חזק וכל השאר עושים ברית נגדו.
2. כאשר התוצאה לא משנה את הסדר, כלומר אם לפי שאפלי A מקבל יותר אז הוא עדיין צריך לקבל יותר גם באלגוריתם שלנו אחרת נבחר שאפלי.

## פיתוח מודל

# מונחים נוספים

## תשלומי צד

בתורת המשחקים נהוגה חלוקה למשחקים שיתופיים ללא תשלומי צד ולמשחקים שיתופיים עם תשלומי צד.

## משחק רווח

משחק רווח (Revenue game) הוא משחק שיתופי בו השחקנים יכולים להרוויח על ידי התאגדות לקבוצות. משחק זה ניתן לניתוח בתור משחק בצורה קואליציונית עם תשלומי צד. במשחק מסוג זה עולות שתי שאלות עיקריות:

1. אילו קואליציות תיוצרנה.
2. כיצד תחלקנה הקואליציות שתיווצרנה את רווחיהן בין החברים בהן.

## תכונות חלוקה הוגנת

כאשר מחלקים דברים בין n משתתפים שלכולם יש זכויות שוות אך העדפות שונות.

* Proportional - כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/n מהשווי הכללי.
* envy-free - כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות כמו החלק שהשני קיבל. חלוקה ללא קנאה היא גם פרופורציונלית.

## העודף של הרסניי (Harsanyi dividend)

"העודף של הרסניי" מזהה את העודף (surplus) שנוצר על ידי קואליציה של שחקנים במשחק שיתופי. כדי לציין עודף של קואליציה S, מחסרים ברקורסיה משווי הקואליציה את העודף של כל תתי-הקואליציות של S. העודף של שחקן בודד הוא השווי שלו עצמו. ערך שאפלי של שחקן מסוים הוא סכום החלק שלו בעודף של כל קואליציה שהוא נמצא בה.

## ליבה של משחק שיתופי (The Core)

ליבה של משחק שיתופי היא קבוצה של חלוקות אפשריות של הרווח שמשיגה הקואליציה שכוללת את כל השחקנים, העונה על שתי דרישות:

* יעילות: הרווח מהמשחק מחולק כולו בין השחקנים, ללא עודף.
* סבירות קואליציונית: הרווח **הכולל** לכל תת-קבוצה של הקואליציה הוא לפחות הסכום אותו הייתה יכולה תת-קבוצה זו לקבל לו הייתה נפרדת מהקואליציה הכוללת את כל השחקנים.

לא לכל משחק יש וקטור שעונה על הדרישות של הליבה, ועל כן לפעמים הליבה של המשחק ריקה, כפי שניתן לראות בדוגמה בהמשך. לעיתים יש וקטורים רבים שעונים על התנאים הללו. קיימים סוגים מסוימים של משחקים שיתופיים בהם ניתן להראות כי תמיד הליבה אינה ריקה, כגון משחק שוק או משחק קמור (Convex). נאי כללי שהוא תנאי הכרחי ומספיק לאי-ריקות הליבה נוסח במשפט בונדרבה-שפלי.

## Convex Cooperative Games

משחק יקרא קמור (Convex) אם לכל שתי תתי קבוצות מתקיים:

נוסחה שקולה:

משחק קמור הוא בעצם משחק קואליציוני בו התרומה השולית של כל שחקן גדלה ככל שהקואליציה אליה הוא מצטרף גדולה יותר, לכן במשחקים קמורים לשחקנים כדאי להצטרף לקואליציות גדולות ככל האפשר.

### תכונות

* כל משחק קמור הוא סופר אדיטיבי. זהו בעצם מקרה פרטי כאשר החיתוך של S ו-T ריק.
* הליבה של משחק קמור אינה ריקה.
* ערך שפלי של משחק קמור אף הוא נמצא בליבה.